

Regresní analýza

Lineární regresní modely

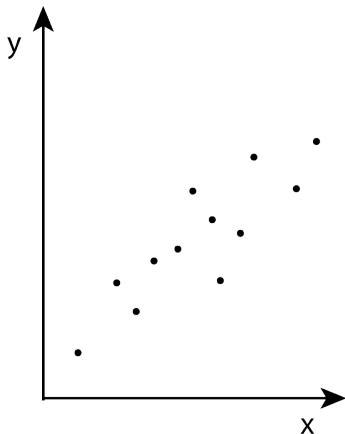
Petr Misák

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavebního zkušebnictví

Brno 2017



- hledání a zkoumání závislostí proměnných, jejichž hodnoty získáme při realizaci experimentu
- vztah mezi nepřímou a přímou metodou zkoušení
- proložení bodového diagramu
- cílem je popsat závislost pomocí vhodného (matematického) modelu

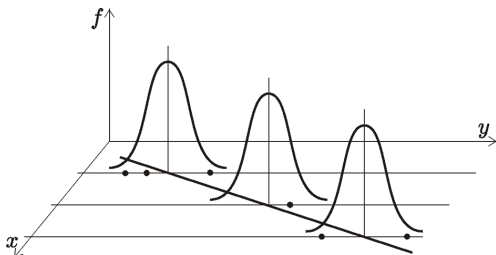


- nezávisle proměnné (vstupy, osa x)
- závisle proměnné (výstupy, osa y)
- podle počtu závisle proměnných
 - jednoduchá regrese
 - vícenásobná regrese
- **regresní funkce** – vztah závislé proměnné na nezávisle proměnných
- podle typu regresní funkce
 - lineární modely
 - nelineární modely

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots \quad (1)$$

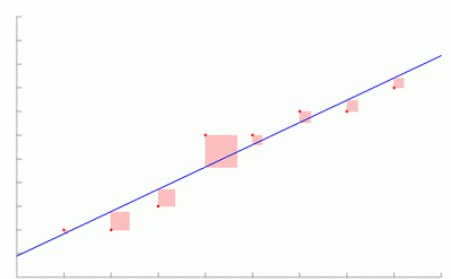
- regresní funkce (model) je lineární v parametrech b
- obecně

$$Y = \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{X}) \quad (2)$$



- **Metoda nejmenších čtverců**
- odhady parametrů
- určení neznámých koeficientů
- minimalizace reziduálního součtu čtverců

$$S^* = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{X})]^2 \quad (3)$$



lineární závislost

$$Y = b_0 + b_1X + E \quad (4)$$

b_0 ... určuje polohu (posunutí) přímky

b_1 ... směrnice (náklon) přímky

E ... náhodná chyba modelu - předpoklad normálního rozdělení pravděpodobnosti

koeficient determinace

shoda modelu s daty

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (5)$$

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i \quad (6)$$

- $\hat{y}_i - \bar{y} \dots$ rezidua - odhad náhodných chyb
- R – Koeficient vícenásobné korelace veličiny Y

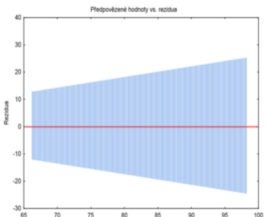
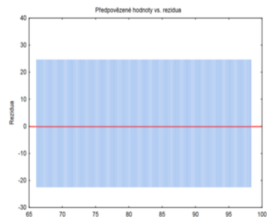
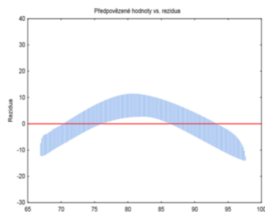
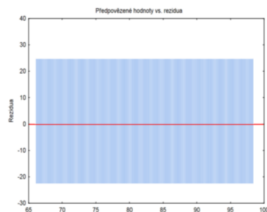
Ověření modelu porovnáním s daty

- F -test vztahů mezi závislou proměnnou a množinou nezávislých proměnných
- F = regresní průměr čtverců/reziduální
- testy nulovosti parametrů b
- při více proměnných X – lineární nezávislost
- náhodné chyby pocházejí z normálního rozdělení $N(0, \sigma^2)$
- homoskedasticita - „stálost“ rozptylu

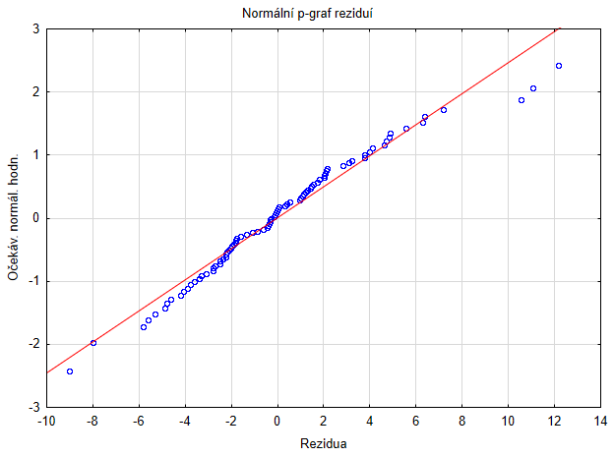
- zpětné ověření předpokladů
 - normality
 - nezávislosti náhodných chyb
- nezávislost a nulovou střední hodnotu chyb indikují body nepravidelně roztroušené kolem nulové úrovně v bodovém grafu reziduí

Analýza reziduí

- nevhodně zvolený model
- porušení předpokladu homoskedasticity



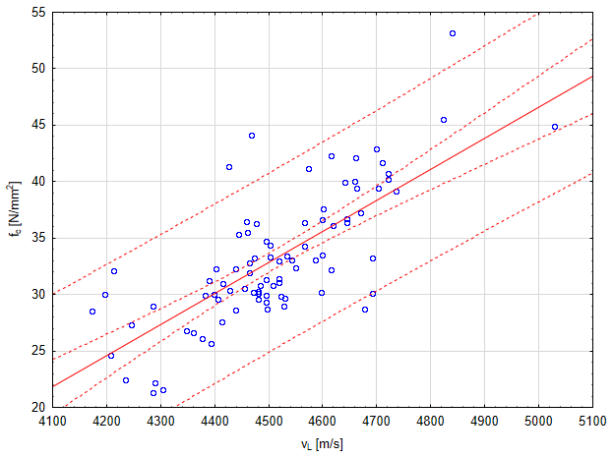
Ověření normality reziduí



- při více nezávisle proměnných
- **přeurčenost regresního modelu** – „zbytečně“ mnoho nezávisle proměnných
- existující závislost mezi nezávisle proměnnými
- nevhodné rozmístění experimentálních dat
- kontrola: **hledání korelace mezi vstupy**

- predikční pás
 - toleranční pás
 - kde budou ležet další pozorování
- spolehlivostní (konfidenční) pás
 - kde s danou pravděpodobností leží pro dané x střední hodnota Y
 - kde můžeme očekávat přímku (křivku)

Regresní pásy



- využití nepřímých (nedestruktivních) metod pro stanovení charakteristické pevnosti betonu v tlaku
- **Alternativa 1:** přímá korelace s vývrty
- 18 dvojic výsledků zkoušek

Stanovení vztahu

- **nezávisle proměnná (osa x)** - výsledek nepřímého zkoušení
- **závislá proměnná (osa y)** – pevnost v tlaku
- stanoví se konfidenční meze pro nejvhodnější křivku a také toleranční meze pro jednotlivá zkoumání

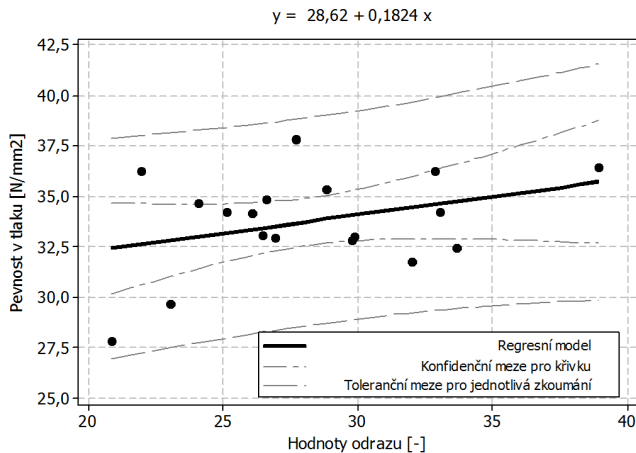
- vztah je stanoven pro méně než jednu desetinu hodnoty pevnosti
- udává takovou bezpečnostní úroveň, kde **90 %** hodnot pevností se předpokládá **vyšších** než odhadnutá hodnota

Aplikace regresní analýzy v ČSN EN 13 791

- 18 dvojic výsledků zkoušek
- hodnoty odrazu stanovených Schmidovým trvdoměrem (nepřímá metoda)
- pevnosti v tlaku stanovené na vývrtech (přímá metoda)

f_c [N/mm^2]	32,9	32,4	35,4	33,1	27,8	34,8	34,2	34,2	32,9	36,3	31,8	36,4	34,7	34,2	36,2	29,6	37,8	33
R [-]	27	34	29	26	21	27	25	26	30	22	32	39	24	33	33	23	28	30

Aplikace regresní analýzy v ČSN EN 13 791



- podmínka: 90 % hodnot pevností v tlaku vyšší než odhadnutá hodnota
- původní regresní model

$$y = 28,62 + 0,1824x \quad (7)$$

- Posunutý regresní model

$$y = 24,62 + 0,1824x \quad (8)$$

Dotazy?

Petr Misák

petr.misak@vutbr.cz

*Vysoké učení technické v Brně
Fakulta stavební
Ústav stavebního zkušebnictví*

szk.fce.vutbr.cz